Aspects combinatoires et algorithmiques des fonctions L d'Artin

B. Allombert

IMB
CNRS/Université de Bordeaux

25/11/2017

Lignes directrices

Introduction

Fonctions L

Fonctions L d'Artin

Formes modulaires

Philosophie de l'exposé

1. Partir de conjectures et de théorèmes classiques sur les fonctions L d'Artin.
2. Peut-on écrire des algorithmes pour illustrer des instances des théorèmes ?
3. Peut-on utiliser les théorèmes pour améliorer les algorithmes ?

Fonctions L

Les fonctions L que nous considérons doivent satisfaire trois propriétés :

1. $L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ converge pour $\Re(s) > r$
2. L admet un prolongement analytique à $\mathbb{C}$ avec un nombre fini de pôles.
3. L admet une équation fonctionnelle de la forme

$$\Lambda(s) = \varepsilon\overline{\Lambda}(1-s)$$

avec

$$\Lambda(s) = L(s)\gamma(s)N^{s/2}$$

où N est un entier et γ est un produit de d translatées de la fonction $\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$.

Fonction ζ de Riemann

Pour la fonction ζ de Riemann,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

avec un pôle simple en 1,

$$\Lambda(s) = \zeta(s)\Gamma_{\mathbb{R}}(s)$$

$$\Lambda(s) = \Lambda(1 - s)$$

et donc $r = 1$, $\varepsilon = 1$, $d = 1$, $\gamma = \Gamma_{\mathbb{R}}$, $N = 1$,

Algorithme

En utilisant la méthode de l'équation fonctionnelle approchée, la fonction `lfun` de PARI/GP peut calculer les valeurs d'une telle fonction avec un coût proportionnel à $d\sqrt{N}$ fois le carré de la précision demandée.

Produit

Si $L_1(s) = \sum a_n/n^s$, $L_2(s) = \sum b_n/n^s$ sont deux fonctions L tel que

$$\Lambda_1(s) = L_1(s)\gamma_1(s)N_1^{s/2}, \Lambda_2(s) = L_2(s)\gamma_2(s)N_2^{s/2}$$

$$\Lambda_1(s) = \varepsilon_1\overline{\Lambda_1(1-s)}, \Lambda_2(s) = \varepsilon_2\overline{\Lambda_2(1-s)}$$

alors $L(s) = L_1(s)L_2(s) = \sum c_n/n^s$ est une fonction L avec

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{d|n} a_d b_{n/d} \\ \varepsilon &= \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ N &= N_1 N_2 \\ \gamma(s) &= \gamma_1(s)\gamma_2(s) \\ d &= d_1 + d_2 \end{aligned}$$

Factorisation

La possibilité de multiplier implique une possibilité de factoriser ce qui permet de décomposer une fonction L en produit de fonctions L ayant des conducteurs N plus petits, ce qui accélère les calculs.
Idée : Chercher des éléments irréductibles et décomposer en produit d'irréductibles.

Fonctions ζ de Dedekind

Soit K un corps de nombres de signature (r_1, r_2) alors la fonction ζ de Dedekind de K définie par

$$\zeta_K(s) = \sum_{I \subset K} \frac{1}{\mathcal{N}(I)^s} = \prod_{\mathfrak{p} \subset K} \frac{1}{1 - \mathcal{N}(\mathfrak{p})^{-s}}$$

est une fonction L avec $N = |\mathrm{Disc} K|$ et

$$\gamma(s) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s)^{r_1 + r_2} \Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)^{r_2}$$

Conjecture (Dedekind)

Si F/K est une extension de corps de nombre alors ζ_F/ζ_K est entière (holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier).

Fonctions L de Hecke

Si F/K est abélienne de conducteur $\mathfrak{f}$ et de sous groupe de congruence C alors la conjecture est vraie :

$$\zeta_F = \zeta_K \prod_{\chi \neq 1} L_\chi$$

où le produit porte sur les caractères du groupe $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{f}}(K)/C$ et où

$$L_\chi(s) = \prod_{\mathfrak{p} \subset K} 1/(1 - \chi(\mathfrak{p})\mathcal{N}(\mathfrak{p})^{-s})$$

est la fonction L de Hecke du caractère χ.

Théoreme (Hecke)

Tout fonction L de Hecke associé à un charactère $\chi \neq 1$ est entière et vérifie une équation fonctionnelle du type précédent.

Fonctions L d'Artin

Soit F/K une extension galoisienne de groupe de Galois G et ρ une représentation linéaire de G dans $\mathbb{C}$ de dimension finie, la fonction L d'Artin est défini par

$$L_\rho(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{\det(1 - \rho\left(\left(\frac{\mathfrak{p}}{F/K}\right)\right) \mathcal{N}\mathfrak{p}^{-s})}$$

Théoreme (Artin)

$$\zeta_F = \prod_{\rho} L_\rho^{\dim \rho}$$

où le produit porte sur les représentations irréductibles de G.

Théoreme (Artin)

Toutes fonctions L d'Artin associée à une représentation de dimension 1 est égale à une fonction L de Hecke.

Théorème de Brauer

Théoreme (Brauer)

Toute fonction L d'Artin s'écrit comme quotient de produits de fonctions L de Hecke.

Corrolaire : Toute fonction L d'Artin est méromorphe et vérifie une équation fonctionnelle.

Conjecture d'Artin

Conjecture (Artin)

Toute fonction L d'Artin associé à une représentation irréductible $\rho \neq 1$ est entière.

Théoreme (Brauer)

Si le groupe $\mathrm{Gal}(F/K)$ est super-résoluble alors toute fonction L d'Artin est égale à une fonction L de Hecke.

Corrolaire : Si le groupe $\mathrm{Gal}(F/K)$ est super-résoluble, la conjecture d'Artin est vraie.

Théoreme (Aramata-Brauer)

Si F/K est galoisienne, il existe $n > 0$ entier tel que $(\zeta_F/\zeta_K)^n$ est un produit de fonctions L de Hecke ne faisant pas intervenir le caractère trivial.

Corollaire : si F/K est galoisienne, ζ_F/ζ_K est entière.

Cas non galoisien

Si F/K n'est pas galoisienne, soit M sa clôture galoisienne, et $G = \mathrm{Gal}(M/K)$. Alors ζ_F/ζ_K s'écrit comme produit de fonction L d'Artin du groupe G, associé à la représentation naturelle de G sur les plongements de F dans M fixant K. et donc la conjecture d'Artin implique la conjecture de Dedekind. De plus

Théoreme (Uchida, van der Waal)

La conjecture de Dedekind est vrai si G est résoluble.

Exemple

Soit F/K une extension galoisienne non abélienne de degré 8, de groupe de Galois G. Le groupe G admet 4 caractères de degré 1 et un de degré 2. Sa table de caractère est :

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \chi_1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \chi_2 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \chi_3 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ \rho & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}$$

et donc

$$\zeta_F = \zeta L_{\chi_1} L_{\chi_2} L_{\chi_3} L_\rho^2 \ .$$

Exemple

$$\zeta_F = \zeta L_{\chi_1} L_{\chi_2} L_{\chi_3} L_\rho^2 \ .$$

Soit M le sous-corps fixé par le centre, alors F/M est une extension quadratique. Si σ est le caractère non trivial alors

$$\zeta_M = \zeta L_{\chi_1} L_{\chi_2} L_{\chi_3}$$

$$\zeta_F = \zeta_M L_\sigma$$

et donc $L_\sigma = L_\rho^2$ en particulier tout les zéros de L_σ sont doubles.

Exemple

Soit N le corps fixe par un sous-groupe cyclique d'ordre 4 de G, et χ_4 un caractère d'ordre 4 de $\mathrm{Gal}(F/N)$, alors

$$\zeta_N = \zeta L_{\chi_1}$$

(quitte à renuméroter les χ).

$$\zeta_F = \zeta_N L_{\chi_4} L_{\chi_4^2} L_{\chi_4^3}$$

$$L_{\chi_4^2} = L_{\chi_2} L_{\chi_3}$$
$$L_{\chi_4^3} = L_{\chi_4}$$

et donc

$$L_{\chi_4} = L_\rho$$

et donc $L_\sigma = L_{\chi_4}^2$, une relation entre deux fonctions L de Hecke difficile à démontrer sans fonctions L d'Artin.

Problème inverse

Le degré de la clôture galoisienne pouvant être grand, il peut être préférable d'utiliser le théorème de Brauer pour écrire la fonction comme quotients de fonctions L de Hecke associé à des corps plus petits. Cela permet de calculer les coefficients de la série de Dirichlet plus rapidement.

Liens avec les formes modulaires

Pour qu'une fonction L soit la fonction L d'une forme modulaire de poids 1, il est nécessaire que $\gamma(s) = \Gamma_{\mathbb{C}} = \Gamma_{\mathbb{R}}(s)\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)$. Pour une fonction L d'Artin cela se produit si et seulement si elle est associée à une représentation ρ de dimension 2 tel que les valeurs propres de $\rho(c)$ soient 1 et -1, où c est la classe de la conjugaison complexe.

Représentations de dimension 2

Les représentations de dimension 2 sont classifiés par leur image projective $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$. Les sous-groupes compacts de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ sont conjugués aux sous-groupes de $PSU(2)$ qui est isomorphes à $SO_3(\mathbb{R})$. Les sous groupes de $SO_3(\mathbb{R})$ sont classifiés : ce sont les groupes cycliques, diédraux et les isométries des polyèdres réguliers : A_4 (tétraèdre) S_4 (octaèdre) A_5 (icosaèdre).

Représentations de dimension 2

Dans les cas A_4 et S_4 (résolubles), les théorèmes de Langlands-Tunnel et Langlands-Weil et Deligne-Serre impliquent qu'une fonction L d'Artin de conducteur N et de déterminant $\chi = \det \rho$ est la fonction L d'une forme modulaire de poids 1, de niveau N et de nebentypus χ, valeur propres des opérateurs de Hecke.
La fonction `mfinit` de PARI/GP permet de calculer la liste de telles formes, ce qui permet de vérifier l'égalité.

Un exemple

Soit E un modèle de Weierstrass de la courbe $X_0(11)$ $E : y^2 + y = x^3 - x^2 - 10x - 20$ et soit $K = \mathbb{Q}(E[3])$ le corps engendré par les coordonnées des points de 3-torsion. L'extension $K/\mathbb{Q}$ est galoisienne de groupe de Galois isomorphe à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ et le quotient projective $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3)$ est isomorphe à S_4. Avec PARI/GP on trouve que K est de discriminant $3^{56}11^{32}$

La table des caractères de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ est

1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ	1	1	-1	1	1	1	-1	-1
ρ_1	2	0	$\sqrt{-2}$	1	-1	-2	0	$-\sqrt{-2}$
ρ_2	2	0	$-\sqrt{-2}$	1	-1	-2	0	$\sqrt{-2}$
ρ_3	2	2	0	-1	-1	2	0	0
σ_1	3	-1	-1	0	0	3	1	-1
σ_2	3	-1	1	0	0	3	-1	1
τ	4	0	0	-1	1	-4	0	0

Seules ρ_1, ρ_2 et τ sont fidèles.

Quotient de fonctions L de Hecke

Nous prenons la fonction L d'Artin associée à ρ_1 qui a pour conducteur $3267 = 3^3 11^2$ et déterminant $\left(\frac{-3}{\cdot}\right)$ et tel que $\gamma = \Gamma_{\mathbb{C}}$.
PARI/GP permet d'écrire L comme quotient L_1/L_2 où :
L_1 est une fonction L de Hecke associé à un caractère d'ordre 8 du groupe de classe d'un corps de degré 6 de discriminant $-3^7 11^4$ avec $\gamma_1 = \Gamma_{\mathbb{C}}^3$ et $N = 3^7 11^4$.
L_2 est une fonction L de Hecke associé à un caractère d'ordre 2 du groupe de classe de rayon 3∞ d'un corps de degré 4 de discriminant $-3^3 11^2$ avec $\gamma_2 = \Gamma_{\mathbb{C}}^2$ et $N = 3^4 11^2$.

Réduction de niveau

PARI/GP permet d'identifier L avec une forme modulaire de niveau 3267 et de nebentypus $\left(\frac{-3}{\cdot}\right)$.

Les coefficients de L sont congrues modulo $1+\sqrt{-2}$ au coefficients de la fonction L de la courbe E qui est associé que forme modulaire de poids 2, de niveau 11 et de caractère trivial.