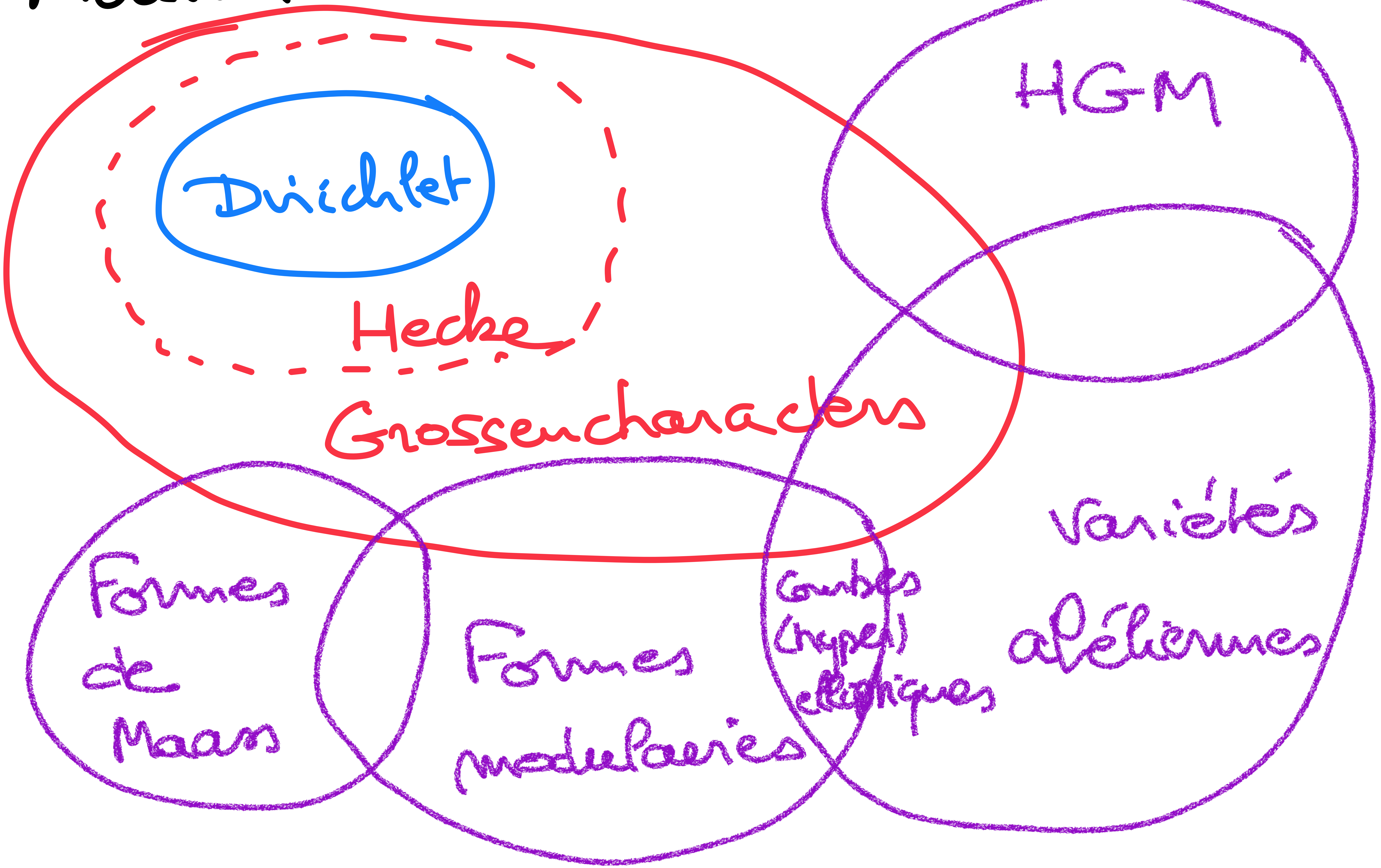
Caractères de Hecke

12 janvier 2022, atelier PariGP, Besançon

Pascal MOLIN, « université-qui-n’a-pas-de-nom »

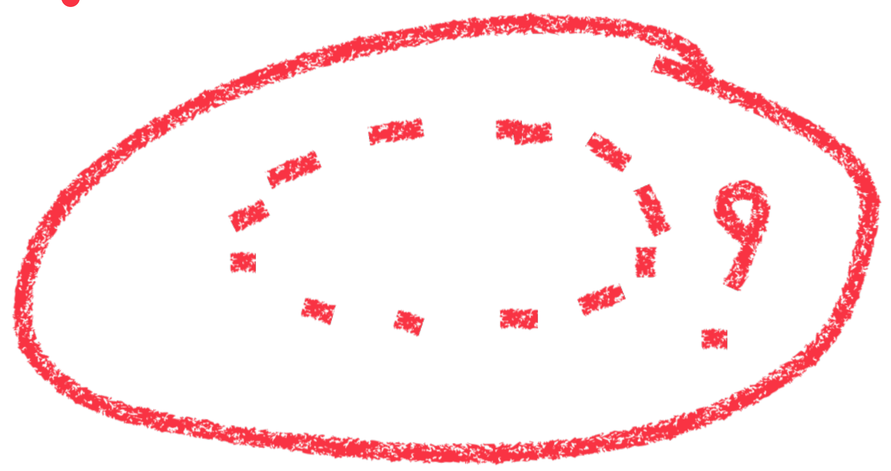
Motivation


Dirichlet
Hecke
Grossencharacters
HGM
variétés algébriques
Formes de Maass
Formes modulaires
courbes (hyper) elliptiques

Plan

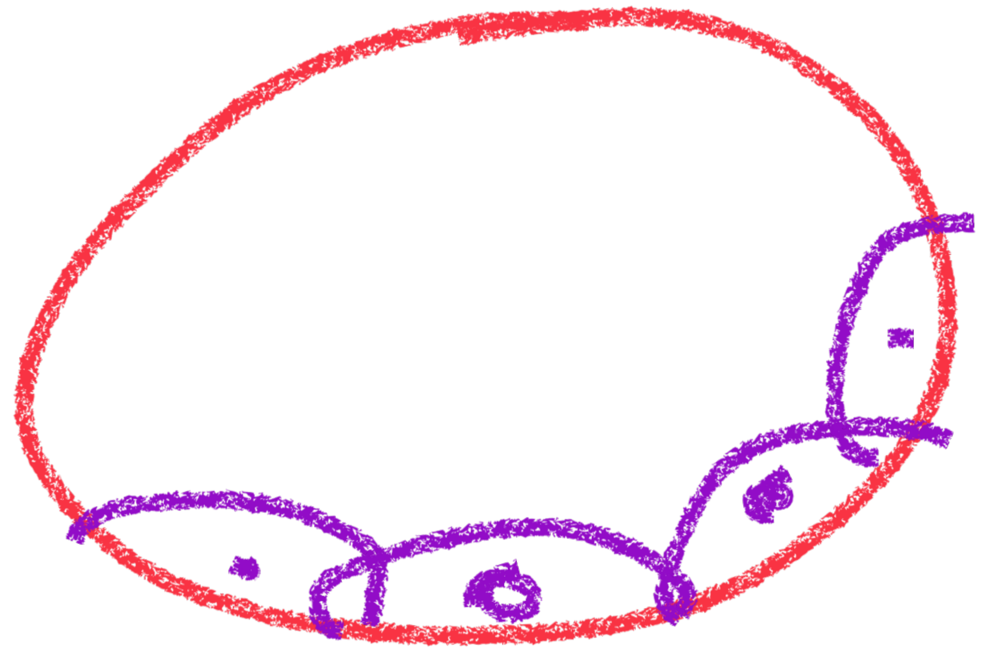
I. Dirichlet — Hecke classiques — Grossencharacters

II. Zoologie



III. Représentation Pari

IV. Package, Exemples



I Caractères

$S = \{ |z| = 1 \} \subset \mathbb{C}$

- Dirichlet

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\chi} S \cup \{0\}$$
$$\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to S \cup \{0\}$$

  - multiplicatif
  - $\boxed{\text{modulaire}}$

- Hecke classiques, $K/\mathbb{Q}$ corps de nombres
  - multiplicatif sur les idéaux
  - module $\mathfrak{m}$

Hecke classiques

\begin{tikzcd}
\{\text{idéaux}\} \arrow[r, "\chi"] \arrow[d] & S \\
\text{groupe des classes de rayon } \mathfrak{m} \arrow[ur]
\end{tikzcd}

$$Cl_{\mathfrak{m}}(K) = \{\text{idéaux premiers à } \mathfrak{m}\} \Big/ \{(\alpha),\ \alpha \equiv 1\ [\mathfrak{m}],\ \alpha > 0 \text{ sur } \mathfrak{m}_\infty\}$$

$$\chi : Cl_m(K) \longrightarrow S$$

$$\parallel$$

Th. corps de classes

$$\mathrm{Gal}(K^m/K)$$

K^m corps de classes de rayon m

caractères des extensions finies abéliennes de K.

En pari, fonctions bnr **

cf COHEN Adv Topics CANT

" Grossencharacters "

Corps de classe $\quad C_K(m) \xrightarrow{\text{Artin}} \mathrm{Gal}(K^{m}/K)$

" groupe des classes d'idèles "

Idèles $\quad \mathbb{A}^\times = \prod' K_v^\times \quad$ produit restreint rel. à $\mathbb{Z}_v^\times$

$$= \underbrace{\prod_{\sigma | \infty} K_\sigma^\times}_{\substack{K_\infty^\times \\ \text{archimédien}}} \times \underbrace{\prod_{v \nmid \infty}{}' K_v^\times}_{\text{idèles finies}}$$

NEW $\longrightarrow$

idèle $\quad (x) = (x_\infty, x_v) \quad x_v \in \mathbb{Z}_v^\times$ presque partout

Grossencharacters = caractères d'idèles

$$\chi : \mathbb{A}^\times \longrightarrow S$$

+2 conditions

- continus $\quad \chi(\mathbb{Z}_p^\times) = 1$ presque partout

  ou $\boxed{\chi(1+p^{n_p}\mathbb{Z}_p) = 1}$

  χ ramifié en p d'indice n

  (χ ramifié en $\sigma \to \mathbb{R}$ si $\chi(-1) \neq 1$)

  $\mathfrak{m} = \prod p^{n_p}$ conducteur

  $\rightsquigarrow$ modulaire

- triviaux sur $K^\times \hookrightarrow \mathbb{A}^\times$

  $\rightsquigarrow$ réciprocité (indépendance valeurs)

x idèle $\qquad \chi(x) = \prod_v \chi_v(x_v)$

produit fini

$\rightsquigarrow$ caractère sur les idéaux premiers au conducteur

$$\boxed{\chi(\mathfrak{a}) \overset{\text{def}}{=} \prod_{\mathfrak{p}^e \| \mathfrak{a}} \chi_{\mathfrak{p}}(\pi_{\mathfrak{p}}^e)}$$

$\pi_{\mathfrak{p}}$ uniformisante

bien défini si $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}$.

Def Grossencharacter

- $C_K = \mathbb{A}^\times / K^\times \xrightarrow{\chi} S$

- $\ker \chi \supset U(m) = \prod_v U_v(m)$ $\begin{cases} \{1\} & \sigma \mid m_\infty \\ \{\pm 1\} & \sigma \nmid m_\infty \\ 1 + p^e \mathbb{Z}_p, & p^e \| m \\ \mathbb{Z}_p^\times & \text{sinon} \end{cases}$

$\rightsquigarrow \chi$ défini modulo m

- $C_K(m) = \mathbb{A}^\times / K^\times \cdot U(m)$

- **Conducteur** f, support = places ramifiées

II Zoologie

1) $K = \mathbb{Q}$

$$\mathbb{A}^\times = \mathbb{R}^\times \times \prod_p{}' \mathbb{Q}_p^\times$$

$$(x) \rightsquigarrow x_p = p^{e_p} u_p, \quad u_p \in \mathbb{Z}_p^\times$$

$$\alpha = \operatorname{sgn}(x) \times \prod p^{e_p} \in \mathbb{Q}$$

$$(x) = \alpha \cdot \left(\frac{x_\infty}{\alpha}, \frac{x_p}{\alpha} \right)$$

$$\mathbb{A}^\times = \mathbb{Q}^\times \cdot \Big(\mathbb{R}_{>0} \times \underbrace{\prod \mathbb{Z}_p^\times}_{= \hat{\mathbb{Z}}^\times} \Big)$$

① $K = \mathbb{Q}$

$$\mathbb{A}^\times / \mathbb{Q}^\times = \mathbb{R}_{>0} \times \hat{\mathbb{Z}}^\times$$

Caractères

- $\mathbb{R}_{>0} \longrightarrow S$, $x \longmapsto x^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{Norme}}$

- $\left(\hat{\mathbb{Z}} / N\hat{\mathbb{Z}}\right)^\times \longrightarrow S$ $\boxed{\text{Dirichlet}}$

② $K = \mathbb{Q}(i)$

- place complexe
- unités μ_4
- principal

$$\mathbb{A}^\times = \mathbb{C}^\times \times \prod_\pi{}' K_\pi^\times$$

$$= \mathbb{Q}(i)^\times \cdot \left(\mathbb{C}^\times/\mu_4 \times \hat{\mathbb{Z}}_K^\times \right)$$

Caractères

- $z \longmapsto |z|^{i\varphi}$ sur $\mathbb{C}^\times$
- $(\mathbb{Z}_K/m)^\times$
- $\mathbb{C}^\times/\mu_4 \longrightarrow S$
  $z \longmapsto \left(\frac{z}{|z|}\right)^{4k}, k \in \mathbb{Z}$

Norme

Dirichlet

$\boxed{\text{Caractère CM}}$

③ $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

- places réelles
- unité fond $\eta = 1+\sqrt{2}$
  $N(\eta) < 0$

$$\mathbb{A}^\times = K^\times \times \left(\mathbb{R}^{\times 2} / \langle -1, \eta \rangle \times \hat{\mathbb{Z}}_K^\times \right)$$

Caractères de $\mathbb{R}_{>0}^2 / \langle \eta^2 \rangle$

$$(\alpha_1, \alpha_2) \longmapsto \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^{i n \frac{\pi}{\log(1+\sqrt{2})}}$$

$\boxed{\text{Caractère Maass}}$

transcendant

4 Le caractère Norme

$$\begin{cases} \mathbb{A}^\times / K^\times \xrightarrow{\|\cdot\|^s} \mathbb{C}^\times \\ (x) \longrightarrow \|x\|^s = \left(\prod_v |x_v|_v\right)^s \end{cases} \qquad s \in \mathbb{C}$$

⇝ on considère nos caractères sur les idèles de norme 1.

<u>remarque</u> évaluation en un idéal principal

$\mathfrak{a} = (\alpha)$, $\forall \mathfrak{p}$, $\alpha = \pi_{\mathfrak{p}}^{e_{\mathfrak{p}}} u_{\mathfrak{p}}$

$$\underbrace{\chi(\alpha)}_{\substack{\text{idèle} \\ K^\times \hookrightarrow \mathbb{A}^\times}} = 1 = \underbrace{\chi_\infty(\alpha) \cdot \prod_{p} \chi_p(u_{\mathfrak{p}})}_{\chi(\mathfrak{a})^{-1}} \cdot \underbrace{\prod_{\mathfrak{p}} \chi_p(\pi_{\mathfrak{p}}^{e_{\mathfrak{p}}})}_{\chi(\mathfrak{a})}$$

5 Cas général

réécriture

$$\mathbb{A}^\times = \underbrace{\left(\prod_{\sigma | \mathbb{R}} \mathbb{R}_{>0} \times \prod_{\sigma | \mathbb{C}} \mathbb{C}^\times\right)}_{K_\infty^{\times,0} \text{ connexe}} \times \underbrace{\left(\prod_{v | \mathbb{R}} \{\pm 1\} \times \prod{}' K_v^\times\right)}_{\mathbb{A}_f^\times \text{ discret}}$$

$K_\infty^{\times,0}$ connexe $\rightsquigarrow$ là que vivent les caractères CM et Maass

$\mathbb{A}_f^\times$ discret $\rightsquigarrow$ caractères de Hecke classiques

Combinaison de deux caractères

- χ_∞ sur $K_\infty^{\times,0}$ "type à l'infini" $\rightsquigarrow$ ordre infini

$$\chi_\infty(\alpha) = \underbrace{\prod_\sigma |\alpha_\sigma|^{i\varphi_\sigma}}_{\text{Maass, } \varphi_\sigma \in \mathbb{R}} \times \underbrace{\prod_{\sigma | \mathbb{C}} \left(\frac{\alpha_\sigma}{|\alpha_\sigma|}\right)^{k_\sigma}}_{\text{CM, } k_\sigma \in \mathbb{Z}}$$

- χ_f sur $\mathbb{A}_f^\times$ classique $\rightsquigarrow$ ordre fini

- tq $\forall \alpha \in K^\times$, $\chi_\infty(\alpha)\, \chi_f(\alpha) = 1$

plus précisément, si χ défini mod m

i.e. $U(m) \subset \ker \chi$

$$1 \to \underbrace{K_\infty^{\times,0} \big/ K^\times \cap U(m)}_{\chi_\infty} \longrightarrow \mathbb{A}^\times \big/ K^\times . U(m) \longrightarrow \mathbb{A}_f^\times \big/ U(m) \to 1$$

$$\mathbb{A}^\times / K^\times . U(m) = C_K(m) \qquad \mathbb{A}_f^\times / U(m) = Cl_m(K)$$

⇝ condition de compatibilité

$$\chi_\infty(\alpha)\,\chi_f(\alpha) = 1 \text{ pour } \alpha \text{ unité} \equiv 1\ [m]$$

Implantation

S places qui engendrent groupe classes

S-idèles

$$\mathbb{A}_S^\times = K_\infty^\times \times \prod_{p\in S} K_p^\times \times \prod_{p\notin S} \mathbb{Z}_p^\times$$

alors

$$\mathbb{A}^\times / K^\times \cdot U(m) = \mathbb{A}_S^\times / K^\times \cdot U(m) = \frac{K_\infty^{\times,\circ} \cdot (\mathbb{Z}_K / m)^\times \times \mathbb{Z}^S}{\underbrace{K^\times \cap \mathbb{A}_S^\times}_{\mathbb{Z}_S^\times,\ S\text{-unités}}}$$

⇝ caractère de

$$\mathbb{Z}^S \times (\mathbb{Z}_K/m)^\times \times \prod_\sigma \mathbb{R}_{>0} \times \prod_{\sigma|\mathbb{C}} (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}^k \times \mathbb{R}^n$$

+ trivial sur $\mathbb{Z}_S^\times$

Application logarithme

$$\mathcal{L} : \{\text{idéaux}\} \longrightarrow \mathbb{Z}^k \times \mathbb{R}^n$$

① on principalise $\mathfrak{a}$ sur S

$$\mathfrak{a} = \prod \mathfrak{p}^{e_\mathfrak{p}} = (\alpha) \prod_{\mathfrak{p} \in S} \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}}$$

② égalité d'idèles

$$(\pi_\mathfrak{p}^{e_\mathfrak{p}}) = \alpha \cdot \Big(\alpha_\infty^{-1} \times \prod_{\mathfrak{p} \in S} \pi_\mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}} \times \underbrace{\prod_\mathfrak{p} \alpha_\mathfrak{p}^{-1} \pi_\mathfrak{p}^{e_\mathfrak{p} - v_\mathfrak{p}}}_{u \in \mathbb{Z}_\mathfrak{p}^\times} \Big)$$

③ $$\mathcal{L}(\mathfrak{a}) = \Big(\underbrace{(v_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p} \in S}}_{\mathbb{Z}^S},\ \underbrace{\log(u \bmod m)}_{(\mathbb{Z}_K/m)^\times \to \mathbb{Z}^k},\ \frac{\log|\alpha_\sigma^{-1}|}{2\pi}, \frac{\arg \alpha_\sigma}{2\pi} \Big)$$

Un caractère est représenté par un vecteur ligne

$$\mathcal{L}^*(\chi) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^k \times \mathbb{R}^n$$

tq

$$\boxed{\chi(x) = \exp\left(2i\pi\, \mathcal{L}^*(\chi) \cdot \mathcal{L}(x)\right)}$$

III Package gchar

1 gcharinit(K, m)

⇝ définit l'application $\mathcal{L}$

⇝ calcule une base du réseau

$$
\begin{array}{ll|cccc|}
 & & S & (\mathbb{Z}_K/m)^\times & \varphi_\sigma & k_\sigma \\
\text{ordre fini} & \widehat{Cl}(K) & \mathbb{Q} & & & \\
 & \widehat{Cl_K(m)} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & & \\
\text{réseau} & \widehat{C_K(m)}\big|_{k=0} & \mathbb{R} & \mathbb{Q} & \mathbb{R} & \\
 & \widehat{C_K(m)} & \mathbb{R} & \mathbb{Q} & \mathbb{R} & \mathbb{Z} \\
 & & \multicolumn{2}{c}{(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^k} & \multicolumn{2}{c}{\mathbb{R}^n}
\end{array}
$$

Package gchar

2. g = gcharinit(K, m)

   ⇝ g.cyc = $[c_1, \dots c_n, 0, 0 \dots 0]$

   g.bnf …

3. chareval(g, chi, ideal)

   chi ↓ composantes dans $\mathbb{Z}^\ell$ mod g.cyc

4. caractère norme $(x) \longmapsto \|x\|^w$

   codé via composante supplémentaire de chi

5 lfun**([g, chi], { })

fonction L associée

$$\Lambda(s,\chi) = N_\chi^{s/2}\,\Gamma_\chi(s) \prod_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}} \left(1-\chi(\mathfrak{p})\,N\mathfrak{p}^{-s}\right)^{-1}$$

- $N = |\Delta_K|\, N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{f})$
- $\Gamma_\chi(s) = \prod_{\sigma \to \mathbb{R}} \Gamma_\mathbb{R}(s + i\varphi_\sigma + k_\sigma)$

$$\times \prod_{\sigma \to \mathbb{C}} \Gamma_\mathbb{C}\left(s + i\varphi_\sigma + \frac{|k_\sigma|}{2}\right)$$

$$\Lambda(1-s,\chi) = W(\chi)\,\Lambda(s,\bar\chi)$$

6 gcharalgebraic

Def caractère de type A $\Leftrightarrow$ valeurs algébriques

$A_0 \Leftrightarrow$ valeurs dans extension finie

Th $$\chi_\infty(\alpha) = \prod |\alpha_\sigma|^{i\varphi_\sigma} \left(\frac{\alpha_\sigma}{|\alpha_\sigma|}\right)^{k_\sigma}$$

- χ de type A $\Leftrightarrow \varphi_\sigma \in i\mathbb{Q}$
- $\boxed{\chi \text{ de type } A_0 \Leftrightarrow \chi_\infty(\alpha) = \prod_\sigma z^{p_\sigma} \bar{z}^{q_\sigma} \quad p_\sigma, q_\sigma \in \mathbb{Z}}$

$$= \|\alpha\|^{w} \cdot \prod_{\sigma \to \mathbb{C}} \left(\frac{\alpha_\sigma}{|\alpha_\sigma|}\right)^{k_\sigma},$$

$\forall \sigma,\ k_\sigma + 2w \equiv 0\ [2]$

IV Exemples

1. $\left(\frac{z}{|z|}\right)^4 \cdot |z|^2$ sur $\mathbb{Q}(i)$ $\rightsquigarrow$ forme CM de $S_5(4)$

2. $E : y^2 = x^3 - x$ CM par $\mathbb{Q}(i)$
   $m = (1+i)^3$

3. $C : y^2 - y = x^5$ CM par $\mathbb{Q}(\zeta_5)$

4 formes modulaires

- $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, $D = \mathrm{disc}(K)$, $\chi_D = \left(\frac{D}{\cdot}\right)$
- $N = |D| N'$, $\psi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ Dirichlet
- χ Hecke de poids k , $N(f) = N'$

  tq $\chi(p) = \psi(p) p^{k-1}$ si $p \nmid N$

- Alors (Weil converse thm)

$$f(z) = \sum_{\mathfrak{a}} \chi(\mathfrak{a}) q^{N(\mathfrak{a})} \in S_k\left(\Gamma_0(N), \psi_\chi \left(\frac{D}{\cdot}\right)\right)$$

5 Formes de Maass sur K réel

$[K:\mathbb{Q}]=3$, $K\subset\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \eta_1 \longrightarrow (a,b,-a-b)\in\mathbb{R}^3 \\ \eta_2 \longrightarrow (c,d,-c-d) \end{cases}$$ unités

$R=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ régulateur

réseau $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)\in\mathbb{Z}^2\begin{bmatrix} \frac{a+2b}{3R}, & \frac{-2a-b}{3R}, & \frac{a-b}{3R} \\ \frac{c+2d}{3R}, & \frac{-2c-d}{3R}, & \frac{c-d}{3R} \end{bmatrix}$

6 Sommes de Jacobi

$a = (a_1, \dots a_k) \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^k$ $\quad K = \mathbb{Q}(\xi_m)$

$\mathfrak{p} \nmid m$, $\quad \chi_{\mathfrak{p}} : (\mathbb{Z}_K/\mathfrak{p})^\times = \mathbb{F}_q^\times \longrightarrow \langle \xi_m \rangle$ tq $\chi_{\mathfrak{p}}(x) \equiv x^{\frac{N(\mathfrak{p})-1}{m}}$

Weil : $J_a(\mathfrak{p}) = \displaystyle\sum_{x_1 + \dots + x_k = 1 \,[\mathfrak{p}]} \chi_{\mathfrak{p}}(x_1)^{a_1} \cdots \chi_{\mathfrak{p}}(x_k)^{a_k}$

est un caractère sur K de module m^2